TD n°10: Théorèmes d'approximation et de factorisation.

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Théorèmes de Runge, Weierstrass et Mittag-Leffler.

Exercice 1. Manipulation du théorème de Runge.

1. On veut que $P(z)$ soit de la forme $1 + zQ(z)$. Mais

$$\sup_{z\in K} |1 + zQ(z)| = \sup_{z\in K} \left|\frac{1}{z} + Q(z)\right|.$$

On applique le théorème de Runge à la fonction $z \mapsto 1/z$, holomorphe au voisinage de K. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus K$ est connexe, on peut donc choisir les fonctions rationnelles avec des pôles à l'infini, c'est-à-dire les polynômes. Il existe donc un polynôme Q vérifiant

$$\sup_{z\in K} \left|Q(z) - \frac{1}{z}\right| < \varepsilon$$

ce qui conclut.

2. On considère l'ouvert $U = \Re(z) > 0 \cup \Re(z) < 0$, et la fonction holomorphe qui vaut 1 sur $\Re(z) > 0$ et -1 sur $\Re(z) < 0$. On considère une suite de compacts $(K_n)_n$, où K_n est l'union des rectangles fermés de sommets $1/n + in, n + in, n - in, 1/n - in$ et son symétrique par rapport à l'axe $\Re(z) = 0$.
Il existe donc, pour tout m, une suite $(P_{n,m})_m$ de polynômes qui converge vers f sur K_n.
Pour avoir la suite voulue, il faut faire un argument diagonal : Considérons $\varphi(n)$ vérifiant

$$\sup_{z\in K_n} |P_{n,\varphi(n)}(z) - f(z)| < \frac{1}{n}.$$

Quitte à changer n, on peut supposer que φ est croissante, et $P_n := P_{n,\varphi(n)}$ converge uniformément vers f sur tout compact de U.

Exercice 2. Fonctions holomorphes à valeurs de dérivées prescrites.
Grâce au théorème de Weierstrass, on sait qu'il existe une fonction holomorphe w ayant un zéro d'ordre k_n en z_n. Le théorème de Mittag-Leffler nous fournit une fonction méromorphe g vérifiant

$$g(z) = \sum_{k=1}^{k_n} \frac{b_{k,n}}{(z - z_n)^k} + O(1)$$

au voisinage de tout z_n, pour n'importe quel choix de b.
Le produit $f(z) = g(z)w(z)$ est holomorphe au voisinage de chaque z_n, et on peut calculer que la valeur en z_n de cette fonction est $b_{k_n,n}w^{(k_n)}(z_n)$. Il faut donc choisir $b_{k_n,n} = \frac{a_{k_n,n}}{w^{(k_n)}(z_n)}$.
De manière générale, en développant le produit de Cauchy, on se rend compte que les conditions $f(z_n) = a_{0,n}$, $f'(z_n) = a_{1,n}, ..., f^{(k_n-1)}(z_n) = a_{k_n-1,n}$ se traduisent en un système d'équations linéaires en les $b_{k,n}$. Ce système est triangulaire, de diagonale $w^{(k_n)}(z_n) \neq 0$, et une solution existe donc. Il faut choisir pour les $a_{k,n}$ de cette façon pour avoir la fonction voulue.

Exercice 3. Quotients de fonctions holomorphes.
On sait que les pôles de f ne s'accumulent pas dans U. Ainsi, par le théorème de Weierstrass, il existe une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(U)$ qui s'annule exactement aux pôles de f à l'ordre l'ordre du pôle de f. Le produit fg définit donc une fonction holomorphe sur U, et on écrit $f = \frac{fg}{g}$.

Exercice 4. $\mathcal{O}(U)$ est un anneau de Bézout
On fixe un ouvert connexe $U \subseteq \mathbb{C}$. On appelle idéal de $\mathcal{O}(U)$ tout sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{O}(U)$ qui vérifie que pour tout $g \in I, f \in \mathcal{O}(U)$, $fg \in I$.
Pour $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$, on note $v_a(f)$ l'ordre d'annulation de f en a, $\mathrm{div}(f) = (v_a(f))_{a\in U}$ et pour $I \subseteq \mathcal{O}(U)$, $\mathrm{div}(I) = (\min_{f\in I} v_a(f))_{a\in U}$. Pour $\boldsymbol{m} = (m_a)_{a\in U}$, $\boldsymbol{n} = (n_a)_{a\in U}$, on écrira $\boldsymbol{m} \geqslant \boldsymbol{n}$ si $m_a \geqslant n_a$ pour tout a.

1. (a) Soit $g \in \mathfrak{m}_a$, $f \in \mathcal{O}(U)$. $f(a)g(a) = 0$ donc $fg \in \mathfrak{m}_a$. Similairement, si $g, h \in \mathfrak{m}_a$ alors $g(a)+h(a) = 0$ donc $g+h \in \mathfrak{m}_a$. Alternativement, $\mathcal{O}(U) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(a)$ est un morphisme d'anneaux et son noyau $\mathfrak{m}_a$ est un idéal.
   (b) Il suffit de vérifier que pour $a \in U$, $v_a(fg) = v_a(f) + v_a(g)$ et $v_a(f + g) \geqslant \min\big(v_a(f), v_a(g)\big)$. Ainsi, si $v_a(f), v_a(g) \geqslant n_a$, $v_a(f + g) \geqslant n_a$, et si $v_a(g) \geqslant n_a$ on a $v_a(fg) \geqslant v_a(g)$.
   La condition $V(f) \geqslant \mathbf{1}_a$ est équivalente à $v_a(f) \geqslant 1$, ce qui revient à dire $f(a) = 0$, donc $I(\mathbf{1}_a) = \mathfrak{m}_a$.
   Clairement, $V(I(\boldsymbol{n})) \geqslant \boldsymbol{n}$. Par le théorème de Weierstrass, si $\boldsymbol{n}$ est à support discret (c'est-à-dire que les n_a sont nuls sauf sur un ensemble discret dans U), il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ qui a ses zéros exactement sur le support de $\boldsymbol{n}$, avec un zéro d'ordre n_a en a - autrement dit, $\mathrm{div}(f) = \boldsymbol{n}$.
   (c) D'une part, on a $g_1f_1 + ... + g_mf_m + h_1f_1 + ... + h_mf_m = (g_1 + h_1)f_1 + ... + (g_m + h_m)f_m$, et d'autre part on a $h \cdot (g_1f_1 + ... + g_mf_m) = hg_1f_1 + ... + hg_mf_m$, donc $(f_1, ..., f_m)$ est bien un idéal.
   L'égalité $\mathrm{div}((f)) \leqslant \mathrm{div}(f)$ découle du fait que $f \in (f)$, et réciproquement, si $h \in (f)$ alors $h = gf$ et donc $\mathrm{div}(h) = \mathrm{div}(g) + \mathrm{div}(f) \geqslant \mathrm{div}(f)$.
   Pour le cas de $(f_1, ..., f_m)$, on sait que si $g \in (f_1, ..., f_m)$ alors $g = g_1f_1 + ... + g_mf_m$ et donc pour tout $a \in U$ on a
   $$v_a(g) \geqslant \min_i v_a(g_if_i) \geqslant \min_i v_a(f_i)$$
   d'où l'inégalité $\mathrm{div}((f_1, ..., f_m)) \geqslant (\min_i v_a(f_i))_a$.

2. Si $f = gh$, alors $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g) + \mathrm{div}(h) \geqslant \mathrm{div}(g)$. Réciproquement, si $\mathrm{div}(f) \geqslant \mathrm{div}(g)$, alors $v_a(f) \geqslant v_a(g)$ pour tout a et donc la fonction méromorphe f/g est en fait holomorphe, donc $f = gf/g$.

3. Soit a un zéro de f, d'ordre n. La condition pour que a soit un zéro d'ordre $\geqslant n$ de $1 - vg$ se traduit par un système linéaire sur les n premières dérivées de v, à savoir
$$\begin{cases} g(0)v(0) = 1 \\ g'(0)v(0) + g(0)v'(0) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(0)v^{(n-k)}(0) = 0. \end{cases}$$
Ce système est triangulaire inférieur, et sa diagonale est $v(0) \neq 0$, donc il admet une unique solution. Par l'exercice 2, il existe une fonction holomorphe v dont les dérivées sont données par cette solution, et une telle fonction vérifie par construction $\mathrm{div}(1 - vg) \geqslant \mathrm{div}(f)$.

4. Notons h un pgcd de f et g, c'est-à-dire une fonction holomorphe qui s'annule en chaque zéro a de f et de g à l'ordre $\min\big(v_a(f), v_a(g)\big)$, qui existe par le théorème de Weierstrass. h divise f et g, et f/h, g/h n'ont aucun zéro en commun. Par la question précédente, il existe donc une fonction holomorphe v telle que $1 - vg/h$ divise f/h. Notons u le quotient, on a $uf/h + vg/h = 1$ donc $uf + vg = h$.

5. On procède par récurrence sur m. D'après la question précédente, l'idéal engendré par $f_1, ..., f_m$ et celui engendré par $f_1, ..., f_{m-2}, h_{m-1}$ où h_{m-1} est un pgcd de f_{m-1} et f_m est le même car h_{m-1} s'écrit comme combinaison linéaire de f_{m-1} et f_m. On en déduit que I est engendré par $m-1$ éléments, ce qui conclut par récurrence.

6. Il suffit de choisir une suite d'image discrète $(a_n)_n$ et définir $I = \{f \in \mathcal{O}(U) : \forall n >> 0, f(a_n) = 0\}$. Cet idéal vérifie $\mathrm{div}(I) = 0$, vu que si on considère une fonction f qui a un zéro simple en chaque a_n, les fonctions $\frac{f(z)}{\prod_{n<N}(z-a_n)}$ sont toutes dans I mais n'ont globalement aucun zéro en commun. Pour autant, toute fonction de I s'annule une infinité de fois, et donc en particulier $1 \notin I$.

Le théorème de factorisation de Hadamard.

Cette partie du TD se présente comme quatre exercices qui, mis ensemble, permettent de prouver le théorème de factorisation de Hadamard :

Théorème (Factorisation de Hadamard)**.** *Soit f une fonction entière d'ordre $\rho > 0$ (voir l'exercice 7 pour la définition), et $p = \lfloor \rho \rfloor$. Il existe un unique polynôme $Q(z)$, de degré p, et un entier $m \geqslant 0$ tels que*

$$f(z) = z^m e^{Q(z)} \prod_{n \geqslant 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Exercice 5. Théorème de factorisation de Weierstrass.
Pour $p \geqslant 0$ entier, on définit

$$E_p(z) = \begin{cases} 1 - z, & p = 0 \\ (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right), & p > 0. \end{cases}$$

1. On calcule

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= (1-z)(1 + z + \ldots + z^{p-1})\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) - \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) \\ &= (1 - z^p)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) - \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) \\ &= -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right). \end{aligned}$$

   On peut majorer brutalement

$$\begin{aligned} |E_p'(zt)| &\leqslant |zt|^p \exp\left(\left|zt + \frac{z^2t^2}{2} + \ldots + \frac{z^pt^p}{p}\right|\right) \\ &\leqslant t^p \exp\left(|zt| + \frac{|zt|^2}{2} + \ldots + \frac{|zt|^p}{p}\right) \\ &= t^p \exp\left(t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^p}{p}\right) = -E_p'(t). \end{aligned}$$

   Démontrer que $E_p'(z) = -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)$ et que pour $t \in [0,1]$, $|z| = 1$, on a $|E_p'(zt)| \leqslant -E_p'(t)$.

2. Soit z de module 1. On écrit $E_p(z) - 1 = \int_0^z E_p'(w)dw = z\int_0^1 E_p'(zt)dt$. On majore ensuite

$$|E_p(z) - 1| \leqslant |z| \int_0^1 |E_p'(zt)|dt = -\int_0^1 E_p'(t)dt = 1 - E_p(1) = 1.$$

   L'inégalité

$$|E_p(z) - 1| \leqslant |z|^{p+1}$$

   pour $|z| \leqslant 1$ découle du lemme de Schwarz (ou de l'application du principe du maximum à $\frac{E_p(z)-1}{z^{p+1}}$).

3. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes non-nuls vérifiant $|a_n| \to \infty$ et $(p_n)_n$ est une suite d'entiers telle que

$$\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n} < \infty.$$

   (a) Comme $E_p(0) = 1$, $\log(E_p(z))$ existe au voisinage de 0 et vérifie, pour z assez proche de 0, $|\log(E_p(z))| \leqslant 2|E_p(z) - 1| \leqslant 2|z|^{p+1}$ (car $|\log(1+w)| \leqslant 2|w|$ pour $|w|$ assez petit).
   Il suffit de prendre n_R tel que pour tout $n \geqslant n_R$, $R/|a_n|$ est "assez proche de 0" (en particulier, $|a_n| > R$) au sens demandé ci-dessus pour avoir l'inégalité voulue.

   (b) Comme $\sum (r/|a_n|)^{1+p_n}$ converge pour tout r, en particulier $\sum_{n \geqslant n_R} \log E_{p_n}(z)$ converge normalement sur $|z| \leqslant R$. En prenant l'exponentielle, on a la convergence uniforme de $\prod_{n \geqslant n_R} E_{p_n}(z/a_n)$ sur ce disque. En rajoutant $n_R - 1$ premiers termes, on a toujours convergence uniforme sur le disque fermé de rayon R, et donc le produit converge uniformément sur tout compact inclus dans ce disque. Comme tout compact de $\mathbb{C}$ est inclus dans un tel disque, le produit converge uniformément sur tout compact.

(c) Comme $\prod_{n\geqslant n_R} E_{p_n}(z/a_n)$ est une exponentielle d'une fonction holomorphe sur le disque ouvert de rayon R, ses zéros dans ce disque sont précisément les zéros des E_{p_n}, $n < n_R$, et donc précisément les a_n de module $< R$ (avec multiplicité). Ce raisonnement vaut pour tout R, et les zéros du produit sont donc exactement les a_n, avec multiplicité.

4. Soit m l'ordre d'annulation de f en zéro, on considère
$$\frac{f(z)}{z^m \prod_{n\geqslant 1} E_{p_n}(z/a_n)}.$$
Cette fonction holomorphe ne s'annule nulle part vu que $z^m \prod_{n\geqslant 1} E_{p_n}(z/a_n)$ a les mêmes zéros que f avec les mêmes multiplicités, et elle admet donc un logarithme, que l'on appelle g. On a donc finalement bien
$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n\geqslant 1} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Exercice 6. Formule de Jensen.
Commençons par un lemme : soit g une fonction entière ne s'annulant pas sur $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$. Alors
$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\theta})|d\theta.$$
On considère la fonction holomorphe $\frac{\log g(z)}{z}$, méromorphe au voisinage du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$. Le théorème des résidus, ou la formule de Cauchy, donne
$$2i\pi \log g(0) = \int_{\partial\overline{\mathbb{D}}(0,R)} \frac{\log g(z)}{z} dz.$$
En déroulant la définition de l'intégrale à droite, on a
$$2i\pi \log g(0) = \int_0^{2\pi} \frac{\log g(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} \log g(Re^{i\theta})d\theta.$$
En divisant par i et en prenant les parties réelles ($\Re\log(w) = \log|w|$) on obtient le résultat voulu pour g.
Pour généraliser ce résultat au cas où f a des racines, on considère $a_1, ..., a_N$ ses zéros avec multiplicités, et on applique le résultat à $\frac{g(z)}{\prod_n (z-a_n)}$, et on obtient
$$\log|f(0)| - \sum_{n=1}^N \log|a_n| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - a_n|d\theta.$$
Il s'agit maintenant d'évaluer cette dernière intégrale, sachant que $|a_n| < R$ pour tout n.
Pour ce faire, on réécrit $\log|Re^{i\theta} - a| = \log|R - ae^{-i\theta}|$ et on fait un changement de variable $\theta \to -\theta$ pour obtenir
$$\int_0^{2\pi} \log|R - ae^{-i\theta}|d\theta = \int_0^{2\pi} \log|R - ae^{i\theta}|d\theta.$$
On reconnaît ici $\int_0^{2\pi} \log|g(e^{i\theta})|d\theta$ avec $g(z) = R - az$ qui n'a pas de zéro dans le disque unité fermé, et cette intégrale s'évalue donc à $2\pi\log(R)$. En rentrant cette expression dans la formule ci-dessus, on obtient :
$$\log|f(0)| - \sum_{n=1}^N \log|a_n| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta - \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} \log(R).$$
En réarrangeant cette expression, on obtient bien la formule de Jensen.

Exercice 7. Racines d'une fonction entière d'ordre fini.
Soit f une fonction entière. On définit l'ordre ρ de f comme
$$\rho = \inf\left\{\alpha > 0 : |f(z)| \leqslant Ae^{B|z|^\alpha},\ A, B \text{ constantes } > 0, |z| \text{ assez grand}\right\}.$$
On note $(a_n)_n$ les zéros de f, par ordre croissant de module et avec multiplicités.

1. $P(z)e^{Q(z)}$ est d'ordre $\deg(Q)$, et $\cos(\sqrt{z})$ est d'ordre $\frac{1}{2}$ car $|\cos(\sqrt{z})| \leqslant \cosh(\sqrt{|z|}) \leqslant e^{\sqrt{|z|}}$.
   Pour f fonction entière, on note $N_f(R)$ le nombre (avec multiplicités) de zéros de f de module $\leqslant R$.

2. (a) On minore $\log(2R/|a_n|)$ par 0 si $R < |a_n| < 2R$ et par $\log(2)$ si $|a_n| \leqslant R$, et on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \log \frac{2R}{|a_n|} \geqslant \log(2) \sum_{|a_n| \leqslant R} 1 = \log_2 N_f(R).$$

   (b) On utilise la formule de Jensen, pour R assez grand on a $\log|f(z)| \leqslant CR^\alpha + D$ par définition de l'ordre de f, et alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \log \frac{2R}{|a_n|} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(2Re^{i\theta})| d\theta - \log|f(0)| \\ &\leq C(2R)^\alpha + D - \log|f(0)|\end{aligned}$$

   Quitte à grandir C, on peut négliger les constantes additives.

3. Il suffit de prouver que $\sum_{n \geqslant N} |a_n|^{-\beta}$ converge pour N grand. L'idée est de dire que $\sum_{n:2^{m-1} \leqslant |a_n| \leqslant 2^m} |a_n|^{-\beta} \leqslant N_f(2^m)2^{-\beta m}$. En prenant $\rho < \alpha < \beta$, on a C tel que pour m assez grand, on a $N_f(2^m) \leqslant C 2^{\alpha m}$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n>>0} |a_n|^{-\beta} &\leqslant \sum_{m>>0} N_f(2^m) 2^{-\beta m + \beta} \\ &\leqslant 2^\beta C \sum_{m>>0} (2^{\alpha-\beta})^m\end{aligned}$$

   qui converge.

Exercice 8. Théorème de factorisation de Hadamard

Soit f une fonction entière d'ordre $\rho > 0$. On pose, pour tout cet exercice, $p = \lfloor \rho \rfloor$, et les (a_n) sont la suite des zéros de f avec multiplicité, rangés par ordre croissant de module.

1. Comme $\sum_{n \geqslant 1} |a_n|^{-p-1}$ converge (car $p+1 > \rho$), la suite $p_n = p$ satisfait les hypothèses du théorème de factorisation de Weierstrass (Exo 5 q4), ce qui conclut.

2. Pour prouver le théorème de Hadamard, il suffit de prouver que g est un polynôme. Pour ce faire, on veut minorer le produit des $E_p(z/a_n)$ - on commence par traiter les facteurs pour lesquels a_n est grand devant z.

   (a) Pour $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, on a $1 - z = \exp(\log(1-z)) = \exp\left(-\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}\right)$ et donc

$$(1-z)\exp\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{z^n}{n}\right) = \exp\left(-\sum_{n \geqslant p+1} \frac{z^n}{n}\right).$$

   (b) On écrit $w = -\sum_{n \geqslant p+1} \frac{z^n}{n}$, on a $E_p(z) = e^w$ donc $|E_p(z)| = |e^w| \geqslant e^{-|w|}$. On a $|w| \leqslant C|z|^{p+1}$, et $|z|^{p+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1-\alpha} |z|^\alpha$ (car $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ et $p+1 > \alpha$), ce qui permet de conclure que

$$|E_p(z)| \geqslant e^{-2^{\alpha-p-1}|z|^\alpha}$$

   (c) Soit N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $z/|a_n| \leqslant \frac{1}{2}$. On a, pour $n \geqslant N$:

$$|E_p(z/a_n)| \geqslant e^{-C|z/a_n|^\alpha}$$

   et donc

$$\prod_{n \geqslant N} |E_p(z/a_n)| \geqslant e^{-C\sum_{n \geqslant 1} |z/a_n|^\alpha}$$

   qui est bien une majoration de la forme $e^{-C|z|^\alpha}$ car $\sum |a_n|^{-\alpha} < \infty$.

3. On s'occupe à présent des facteurs pour lesquels a_n est petit devant z, lesquels sont en nombre fini.

   (a) Il s'agit ici de démontrer que
   $$\left|\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}.$$
   Pour ce faire, il suffit de démontrer que $\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k}\right| \leqslant C|z|^\alpha$ (encore une fois, on majore généreusement $|e^w| \geqslant e^{-|w|}$). Comme α est supérieur au degré du polynôme $\sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k}$, l'existence de C est claire.

   (b) Il suffit de montrer que pour $z \notin \bigcup_{n\geqslant 1}\mathbb{D}(a_n, |a_n|^{-p-2})$ et n vérifiant $|z/a_n| > \frac{1}{2}$, on a $|1 - z/a_n| \geqslant (2|z|)^{-p-3}$. On commence par écrire
   $$|1 - z/a_n| = |z - a_n|/|a_n| \geqslant |a_n|^{-p-2}/|a_n| = |a_n|^{-p-3}$$
   puis on observe que $|a_n| < 2|z|$ par hypothèse, ce qui conclut.

   (c) La condition $\big||z|-|a_n|\big| > |a_n|^{-p-2}$ garantit que $z \notin \bigcup_{n\geqslant 1}\mathbb{D}(a_n, |a_n|^{-p-2})$. On considère $\rho < \alpha' < \alpha$, on a $N_f(2|z|) \leqslant C|z|^{\alpha'}$, et ainsi
   $$\prod_{n:|a_n|<|2z|}\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \geqslant (2|z|)^{-(p+3)C|z|^{\alpha'}} = e^{-C(p+3)|z|^{\alpha'}\log|2z|}.$$
   Quitte à agrandir C, on a pour $|z|$ assez grand $e^{-C(p+3)|z|^{\alpha'}\log|2z|} \geqslant e^{-C(p+3)|z|^{\alpha}}$ car $\alpha' < \alpha$. On a donc bien
   $$\prod_{|a_n|<2|z|}\left|E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geqslant e^{-C|z|^\alpha}$$
   et pareil pour le produit sur $|a_n| \geqslant 2|z|$, ce qui conclut.

4. On écrit
   $$e^{g(z)} = \frac{f(z)}{z^m\prod_{n\geqslant 1}E_p(z/a_n)}.$$
   Si $\big||z| - |a_n|\big| > |a_n|^{-p-1}$ pour tout n et $|z|$ assez grand, on a
   $$|e^{g(z)}| \leqslant |f(z)|e^{C|z|^\alpha}$$
   et comme f est d'ordre $\rho < \alpha$, on a l'inégalité demandée.

5. (a) Si on remplace h par $CR^\alpha - h$, il suffit de prouver que
   $$\frac{h^n(0)}{n!} = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$
   En développant $2u(Re^{i\theta}) = h(Re^{i\theta}) + \overline{h}(Re^{i\theta})$, on a
   $$\begin{aligned}\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta &= \frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} h(Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta + \frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} \overline{h}(Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{h^{(n)}(0)}{n!} + \frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} \overline{h}(Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.\end{aligned}$$
   Cette deuxième intégrale est le conjugué complexe de
   $$\frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} h(Re^{i\theta})e^{in\theta}d\theta = \frac{1}{2i\pi R^n}\int_{\partial D} h(Rz)z^{n-1}dz$$
   qui est nulle par la formule de Cauchy.

(b) On majore brutalement

$$\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\left(CR^\alpha - u(Re^{i\theta})\right)d\theta$$
$$\leqslant 2CR^{\alpha-n} - 2u(0)R^{-n}.$$

Pour voir que

$$\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})d\theta = 2\pi u(0)$$

on peut au choix faire un raisonnement similaire à celui utilisé pour la question 5.(a), utiliser la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques ou encore développer u en série de Fourier (qui converge normalement sur tout compact).

6. Si l'ensemble $\bigcap_{n\geqslant 1}\left\{\left||z|-|a_n|\right| > |a_n|^{-p-2}\right\}$ contient des cercles de rayons aussi grands que voulus, on pourra conclure à l'aide de la question précédente que g est un polynôme : en faisant tendre R vers l'infini, on trouve $g^{(n)}(0) = 0$ pour $n > \alpha$.
L'ensemble $\bigcup_{n\geqslant 1}\{\left||z|-|a_n|\right| < |a_n|\}$ est une réunion disjointe d'anneaux d'épaisseur $2|a_n|^{-p-2}$ et de rayons $|a_n|$. L'épaisseur d'un tel anneau est $4\pi|a_n|^{-p-1}$, et la réunion des anneaux a donc une mesure finie, on peut en particulier trouver des cercles de rayons arbitrairement grands, disons une suite croissante $(R_m)_m$, dans le complémentaire.
On a donc, pour u la partie réelle de g et $n > \rho$:

$$\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant 2CR_m^{\alpha-n} - 2u(0)R_m^{-n}.$$

En faisant tendre $m \to \infty$, on trouve $g^{(m)}(0) = 0$, démontrant que g est un polynôme de degré $\leqslant \rho$ et prouvant ainsi le théorème de Hadamard.